УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ЗАДАННЫМИ СИСТЕМАМИ М-ПЕРЕСТАНОВОЧНЫХ ПОДГРУПП

В.О. ЛУКЬЯНЕНКО
(Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины)

Пусть A – подгруппа конечной группы G. Тогда мы говорим, что подгруппа A является m-перестановочной подгруппой в группе G, если A перестановочна с каждой максимальной подгруппой любой холловской подгруппы группы G. Работа посвящена исследованию групп с заданными системами m-перестановочных подгрупп. Одним из основных итогов данной работы является следующий результат: пусть G – группа и P – силовская p-подгруппа в G, где p – наименьший простой делитель порядка $|G|$. Если каждая максимальная подгруппа из P является m-перестановочной подгруппой в G, тогда G p-нильпотентна.

1. Введение. Все рассматриваемые в данной работе группы конечны. Пусть A, B – подгруппы группы G. Тогда подгруппа A группы G называется *перестановочной с подгруппой* B, если $AB = BA$. Если A перестановочна со всеми подгруппами из G, то A называется *перестановочной* [1] или *квазинормальной* [2] *подгруппой в* G. Изучение перестановочных подгрупп было начато в классической работе Оре [2], где было доказано, что если A – квазинормальная подгруппа группы G, то A субнормальна в G. Уточняя отмеченный результат, Ито и Сеп в работе [3] доказали, что для каждой перестановочной подгруппы H группы G факторгруппа H/H_G нильпотентна. В дальнейшем Майер и Шмид доказали [4], что при таких условиях верно также, что $H/H_G \leq Z_\infty(G/H_G)$. В другом направлении этот результат Оре получил развитие в работах Кегеля [5] и Дескинса [6], где было показано, что подгруппы H, перестановочные со всеми силовскими подгруппами группы G, наследуют ряд ключевых свойств перестановочных подгрупп. В частности, H по-прежнему субнормальна, факторгруппа H/H_G нильпотентна, а квазинормальные субнормальные подгруппы группы G образуют (в общем случае собственную) подрешетку решетки всех субнормальных подгрупп группы G. После работ [5 – 6] многими авторами предпринимались попытки исследования и применений других типов обобщенно перестановочных подгрупп.

Пусть $\varnothing \neq X \leq G$, тогда мы будем говорить, следуя [7], что подгруппа A *X-перестановочна с* B, если $AB^x = B^xA$ для некоторого элемента $x \in X$. Подгруппа A группы G называется *X-перестановочной в* G, если A X-перестановочна со всеми подгруппами из G. Значение понятия X-перестановочности связано прежде всего с тем, что многие важные классы конечных групп допускают точное описание в терминах X-перестановочных подгрупп. Заметим, что 1-перестановочные подгруппы – это в точности перестановочные подгруппы. В другом предельном случае мы имеем дело с G-перестановочными подгруппами. Такие подгруппы были впервые рассмотрены в работе [7] и они уже нашли ряд интересных приложений [7 – l0]. Подгруппа A группы G называется *X_m-перестановочной подгруппой в* G [11], если A X-перестановочна с каждой максимальной подгруппой любой холловской подгруппы группы G. В данной работе мы анализируем следующее понятие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. *Пусть A – подгруппа группы G. Тогда мы говорим, что A является m-перестановочной подгруппой в группе G, если A перестановочна с каждой максимальной подгруппой любой холловской подгруппы группы G.*

ПРИМЕР 1.2. Пусть $G = S_4$ – симметрическая группа степени 4, $A = \langle (12)(34) \rangle$. Подгруппа A является m-перестановочной в G, но A не перестановочна с силовскими 3-подгруппами группы G. Значит класс всех m-перестановочных групп в общем случае шире, чем класс всех перестановочных групп.

Одним из основных итогов данной работы является следующий результат (теорема 3.7): *пусть G – группа и P – силовская p-подгруппа в G, где p – наименьший простой делитель порядка $|G|$. Если каждая максимальная подгруппа из P является m-перестановочной подгруппой в G, тогда G p-нильпотентна.*

2. Предварительные результаты

Пусть G – некоторая группа и X – подгруппа в G. Тогда справедливы следующие утверждения.

ЛЕММА 2.1 [7]. *Пусть A, B – подгруппы из G и K – нормальная подгруппа в G.*

(1) *Если A X-перестановочна с B, то B X-перестановочна с A.*

(2) *Если A X-перестановочна с B, то A^x X^x-перестановочна с B^x для всех $x \in G$.*

(3) *Если A X-перестановочна с B, то AK/K XK/K-перестановочна с BK/K в G/K.*

(4) *Пусть $K \leq A$. Тогда A/K XK/K-перестановочна с BK/K в том и только том случае, когда A X-перестановочна с B.*

(5) *Если A X-перестановочна с B и $X \le M \le G$, то A M-перестановочна с B.*

(6) *Если A X-перестановочна с B и $X \le N_G(A)$, то A перестановочна с B.*

(7) *Если F – перестановочная подгруппа группы G и A X-перестановочна с B, то AF X-перестановочна с B.*

ЛЕММА 2.2. *Пусть N – абелева минимальная нормальная подгруппа группы G и подгруппа H X_m-перестановочна в G. Тогда факторгруппа HN/N является $(XN/N)_m$-перестановочной в G/N.*

Доказательство. Пусть E/N – холловская π-подгруппа в G/N и M/N – произвольная максимальная подгруппа в E/N. Покажем, что факторгруппа HN/N XN/N-перестановочна с M/N. Поскольку N – абелева минимальная нормальная подгруппа в G, то $|N| = p^{\alpha}$, где p – некоторый простой делитель порядка $|G|$. Тогда для некоторой холловской π-подгруппы G_π группы G имеет место $G_\pi \le E$. Действительно, если $p \in \pi$, тогда $|G : E| = |G/N : E/N|$ и E является холловской π-подгруппой в G. Поэтому можем полагать $G_\pi = E$. Очевидно, что в этом случае $M = M \cap G_\pi$ – максимальная подгруппа в E. Если $p \in \pi'$, то по теореме Шура – Цассенхауза заключаем, что E содержит холловскую π-подгруппу G_π. Поскольку индекс $|G:E|$ является π'-числом, то G_π является холловской подгруппой в G. Следовательно, $E/N = G_\pi N/N$, $M/N = (M \cap G_\pi)N/N$. Покажем, что $M \cap G_\pi$ – максимальная подгруппа в G_π. Очевидно, $M \cap G_\pi \ne G_\pi$. Предположим, что для некоторой подгруппы D группы G имеет место $M \cap G_\pi < D < G_\pi$. Тогда

$$M = N(M \cap G_\pi) \le ND \le NG_\pi = E$$

и, следовательно, либо $M = ND$, либо $ND = E$. Если $M = ND$, тогда

$$D = D \cap M = D \cap N(M \cap G_\pi) = (D \cap N)(M \cap G_\pi) = M \cap G_\pi.$$

Если $ND = E$, тогда

$$D = D \cap E \le G_\pi \cap NG_\pi = G_\pi.$$

Но оба эти случая невозможны в силу выбора подгруппы D. Таким образом, $M \cap G_\pi$ – максимальная в G_π подгруппа и согласно условию леммы подгруппа H X-перестановочна с $M \cap G_\pi$. Тогда ввиду леммы 2.1 (3), подгруппа HN/N XN/N-перестановочна с $M/N = (M \cap G_\pi)N/N$. Поэтому получаем, что факторгруппа HN/N $(XN/N)_m$-перестановочна в G/N. Лемма доказана.

Следующая лемма хорошо известна.

ЛЕММА 2.3. *Пусть A, B – собственные подгруппы из G и $G = AB$. Тогда $G = AB^x$ и $G \ne AA^x$ для всех $x \in G$.*

Следующие известные результаты о субнормальных подгруппах будут использоваться в работе в дальнейшем.

ЛЕММА 2.4 [12]. *Пусть G – группа $A \le K \le G$, $B \le G$. Тогда*

(1) *Если A – субнормальная холловская подгруппа группы G, тогда A – нормальна в G.*

(2) *Если A – субнормальна в G и B – холловская π-подгруппа группы G, тогда $A \cap B$ – холловская π-подгруппа в A.*

(3) *Если A – субнормальна в G и A является π-подгруппой в G, тогда $A \le O_\pi(G)$.*

Для удобства приведем в виде лемм некоторые наиболее часто используемые в основном тексте известные результаты.

ЛЕММА 2.5 [13]. *Пусть G – p-разрешимая группа. Тогда G p-сверхразрешима тогда и только тогда, когда для каждой максимальной подгруппы M из G с $p \mid |G : M|$, имеет место $|G:M| = p$.*

ЛЕММА 2.6 [13]. *Пусть силовская p-подгруппа группы G циклична, где p – наименьший простой делитель порядка $|G|$. Тогда G p-нильпотентна.*

3. Основные результаты

В работе Оре [2] было доказано, что если H – квазинормальная подгруппа группы G, то H субнормальна в G. Для m-перестановочной подгруппы это в общем случае не верно. Мы покажем, что если H – m-перестановочная нильпотентная подгруппа в G, тогда H – субнормальная подгруппа в G (см. следствие 3.3).

ЛЕММА 3.1. *Если H – m-перестановочная подгруппа в группе G и $H \le M$, где M – максимальная подгруппа в G, то $H^G \le M_G$.*

Доказательство. Пусть H – m-перестановочная подгруппа в G и M – максимальная подгруппа группы G, которая содержит H. Покажем, что $H \le M^g$ для любого элемента g группы G. Действительно, допустим, что это не так и пусть для некоторого элемента x группы G подгруппа H не входит в M^x. Поскольку M^x также является максимальной подгруппой группы G, то согласно условию леммы $HM^x = M^xH = G$. Тогда ввиду леммы 2.3 имеем $HM^x = G = HM = M$, противоречие. Следовательно, имеет место

$$H \le \bigcap_{g \in G} M^g = M_G.$$

Поскольку замыкание H^G – наименьшая нормальная подгруппа в G, содержащая H, то, очевидно, $H^G \le M_G$.

ЛЕММА 3.2. *Пусть G – группа, H – m-перестановочная подгруппа в G, тогда $F(H)$ – субнормальная подгруппа в G.*

Доказательство. Пусть p – произвольный простой делитель порядка $|H|$. Покажем сначала, что $O_p(H) \leq O_p(G)$. Пусть $N = (O_p(H))^G$, P – силовская p-подгруппа в N и $O_p(H) \leq P$. Если P – нормальная подгруппа группы G, то, очевидно, $O_p(H)$ – субнормальная подгруппа в G. Тогда согласно лемме 2.4 (3), $O_p(H) \leq O_p(G)$. Поэтому можем полагать, что подгруппа P не нормальна в G. В силу леммы Фраттини имеет место $G = NN_G(P)$. Поскольку подгруппа P не нормальна в G, то группа G содержит такую максимальную подгруппу M, что $G = NM$, где M не содержит подгруппу N и $N_G(P) \leq M$. Если $H \leq M$, то, согласно лемме 3.1, $N \leq H^G \leq M_G$, противоречие. Поэтому подгруппа H не содержится в M и, следовательно, $HM = MH = G$. Поскольку $O_p(H)$ – нормальная подгруппа в H, то

$$N = (O_p(H))^G = (O_p(H))^{HM} = (O_p(H))^M \leq M,$$

противоречие. Значит $O_p(H) \leq O_p(G)$. Поскольку

$$F(H) = \prod_{p\in\pi(H)} O_p(H)$$

и $O_p(H) \leq O_p(G) \leq F(G)$, то $F(H) \leq F(G)$. Следовательно, $F(H)$ – субнормальная подгруппа группы G.

СЛЕДСТВИЕ 3.3. *Пусть G – группа, H – m-перестановочная нильпотентная подгруппа в G, тогда H – субнормальная подгруппа в G.*

СЛЕДСТВИЕ 3.4. *Пусть H – силовская подгруппа группы G, которая является m-перестановочной подгруппой в G. Тогда H – нормальная подгруппа в G.*

СЛЕДСТВИЕ 3.5. *Если каждая силовская подгруппа группы G является m-перестановочной подгруппой в G, то G – нильпотентна.*

СЛЕДСТВИЕ 3.6. *Если G – группа Шмидта, тогда каждая m-перестановочная подгруппа в G является субнормальной в G.*

ТЕОРЕМА 3.7. *Пусть G – группа и P – силовская p-подгруппа в G, где p – наименьший простой делитель порядка $|G|$. Если каждая максимальная подгруппа из P является m-перестановочной подгруппой в G, тогда G p-нильпотентна.*

Доказательство. Предположим, что теорема неверна и G – контрпример минимального порядка. Покажем сначала, что факторгруппа G/N p-нильпотентна для любой абелевой минимальной нормальной подгруппы N из G. Поскольку $|G/N| < |G|$, достаточно лишь проверить, что условие теоремы верно для G/N. Пусть H/N – максимальная подгруппа в PN/N. Покажем, что факторгруппа H/N m-перестановочна в G/N. Поскольку N – абелева минимальная нормальная подгруппа в G, то $|N| = q^\alpha$, где q – некоторый простой делитель порядка $|G|$. Если $q = p$, то, очевидно, H является максимальной подгруппой в P и согласно условию теоремы H – m-перестановочная подгруппа в G. Предположим теперь, что $q \neq p$. Тогда для некоторой максимальной подгруппы P_1 группы P имеет место $H = P_1N$ и, очевидно, H является m-перестановочной подгруппой в G. Ввиду леммы 2.2, факторгруппа H/N m-перестановочна в G/N. Значит факторгруппа G/N p-нильпотентна для любой абелевой минимальной нормальной подгруппы N из G. Поскольку класс всех p-нильпотентных групп замкнут относительно образования подпрямых произведений и всегда из p-нильпотентности факторгруппы $G/\Phi(G)$ следует p-нильпотентность самой группы G, то получаем, что N – единственная абелева минимальная нормальная подгруппа группы G и $\Phi(G) = 1$. Пусть P_1 – произвольная максимальная подгруппа в P. Тогда согласно следствию 3.3 подгруппа P_1 субнормальна в G. В силу леммы 2.4 (3), $P_1 \leq O_p(G)$. Допустим, что $P_1=O_p(G)$. Если P содержит такую максимальную подгруппу P_2, что $P_2 \neq P_1$, тогда аналогично получаем, что $P_2 \leq O_p(G)=P_1$ и, следовательно, $P_1 = \Phi(P)$. Тогда $|P/\Phi(P)| = |P:P_1| = p$. Поэтому подгруппа $P/\Phi(P)$ циклична, а значит и подгруппа P циклична. Но тогда согласно лемме 2.6 группа G p-нильпотентна, противоречие. Поэтому $P = O_p(G)$. Тогда N – единственная минимальная нормальная подгруппа в G, которая содержится в P, следовательно, $N = O_p(G)=P$. Пусть M – произвольная максимальная подгруппа группы G. Согласно условию теоремы, $P_1M = MP_1$. Если $P_1M = G$, тогда $PM = G$. Но поскольку подгруппа $P = N$ абелева, то $P \cap M = 1$, противоречие. Следовательно, $P_1M = M$ для каждой максимальной подгруппы M группы G. Значит $P_1 \leq \Phi(G) = 1$, следовательно, $|P| = p$. Поэтому в виду леммы 2.6 группа G p-нильпотентна. Это противоречие завершает доказательство теоремы.

ТЕОРЕМА 3.8. *p-разрешимая группа G p-сверхразрешима тогда и только тогда, когда все субнормальные подгруппы группы G перестановочны с каждой максимальной подгруппой M группы G такой, что $p||G:M|$, где p – некоторый простой делитель порядка $|G|$.*

Доказательство. Предположим сначала, что группа G p-сверхразрешима. Покажем, что все субнормальные подгруппы группы G перестановочны с каждой максимальной подгруппой M группы G такой, что $p||G : M|$. Предположим, что это утверждение не верно и пусть G – контрпример минимального порядка. Пусть H – произвольная субнормальная подгруппа в G и M – такая максимальная подгруппа в G, что $p||G : M|$. Тогда согласно лемме 2.5 $|G : M| = p$. Если $H \leq M$, то утверждение очевидно. Поэтому можем полагать, что подгруппа M не содержит H. Тогда для нормального замыкания имеем $MH^G = G$ и $|G : M|=|H^G : M \cap H^G| = p$. Следовательно, $M \cap H^G$ – максимальная подгруппа в H^G. Поскольку $|H^G| < |G|$, то условия теоремы выполняются в H^G, и, следовательно,

$$(M \cap H^G)H = H^G = H(M \cap H^G).$$

Поэтому получаем, что

$$MH = M(M \cap H^G)H = MH^G = G = HM.$$

Предположим теперь, что все субнормальные подгруппы группы G перестановочны с каждой максимальной подгруппой M группы G такой, что $p||G : M|$, где p – некоторый простой делитель порядка $|G|$. Покажем, что группа G – p-сверхразрешима. Предположим, что это утверждение не верно и пусть G – контрпример минимального порядка. Очевидно, что условия теоремы выполняются в факторгруппе G/N для любой минимальной нормальной подгруппы N группы G. В силу выбора $|G/N| < |G|$, следовательно, факторгруппа G/N – p-сверхразрешима. Предположим, что $\Phi(G) \neq 1$ и $N \leq \Phi(G)$. Поскольку класс всех p-сверхразрешимых групп является насыщенной формацией [14, с. 43], то группа G p-сверхразрешима, противоречие. Значит, $\Phi(G) = 1$ и подгруппа N не содержится в $\Phi(G)$. Если группа G содержит две различные минимальные нормальные подгруппы L и N, тогда факторгруппы G/L и G/N p-сверхразрешимы и, следовательно, $G \cong G/(L \cap N)$ – p-сверхразрешимая группа, противоречие. Поэтому можем полагать, что N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G. Поскольку подгруппа N не содержится в $\Phi(G)$, то для некоторой максимальной в G подгруппы M имеет место $G = NM$. Понятно, что $N \cap M = 1$, и, следовательно, $G = [N]M$. Поскольку группа G p-разрешима, то либо N – p'-группа, либо p-группа. Но в первом случае группа G p-сверхразрешима, поскольку p-сверхразрешима факторгруппа G/N, что противоречит выбору группы G. Значит, N – p-группа. Пусть X – минимальная субнормальная подгруппа в N, тогда X является субнормальной подгруппой в G. Согласно условию теоремы $XM = MX = G$. Но тогда $|N| = |G : M| = |X| = p$ и, следовательно, группа G p-сверхразрешима. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York: Walter de gruyter, 1992.
2. Ore, O. Contributions in the theory of groups of finite order / O. Ore // Duke Math. J. – 1939. – Vol. 5. – P. 431 – 460.
3. Ito, N. Uber die Quasinormalteiler von endlichen Gruppen / N. Ito, J. Szèp // Act. Sci. Math. – 1962. – Vol. 23. – P. 168 – 170.
4. Maier, R. The embedding of quasinormal subgroups in finite groups / R. Maier, P. Schmid // Math. Z. – 1973. – Vol. 131. – P. 269 – 272.
5. Kegel, O.H. Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen / O.H. Kegel // Math. Z. – 1962. – Vol. 78. – P. 205 – 221.
6. Deskins, W.E. On quasinormal subgroups of finite groups / W.E. Deskins // Math. Z. – 1963. – Vol. 82. – P. 125 – 132.
7. Го, В. X-перестановочные подгруппы / Веньбинь Го, К.П. Шам, А.Н. Скиба // Сиб. мат. журнал. – 2007. – Т. 4, № 61. – С. 742 – 759.
8. Го, В. G-накрывающие системы подгрупп для классов p-сверхразрешимых и p-нильпотентных конечных групп / Веньбинь Го, К.П. Шам, А.Н. Скиба // Сиб. мат. журнал. – 2004. – Т. 45, № 3. – С. 75 – 92.
9. Guo, W. Conditionally Permutable Subgroups and Supersolubility of Finite Groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // SEAMS Bull Math. – 2005. – Vol. 29, № 2. – P. 240 – 254.
10. Guo, W. X-semipermutable subgroups of finite groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // J. Algebra. – 2007. – № 315. – C. 31 – 41.
11. Guo, W. Finite Groups with given X_m-semipermutable Subgroups / W. Guo [и др.]. – Гомель, 2007. – 15 с. – (Препринт / ГГУ им. Ф.Скорины; № 8).
12. Wielandt, H. Subnormal subgroups and permutation groups / H. Wielandt // Lectures given at the Ohio State University, Columbus, Ohio, 1971.
13. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1967.
14. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.

Поступила 21.04.2008